2025 年 11 月 23 日

関係者各位

日本大学ビジネスプランコンテスト実行委員会
審査管理部

NUBiz 二次審査 ホワイトペーパー 詳細版

1　説明

1.1　要旨

日本大学ビジネスプランコンテストでは, 審査の透明性を担保するため「審査員の公表」「審査基準の明示」「公平性ある審査」を掲げています. 本件では「公平性ある審査」に焦点を当て, 公平性の確保の仕方についてまとめます.

1.2　目的

多くの応募が集まった場合, 少人数での審査は審査員 1 人あたりの負担が大きくなります. そこで, 複数の審査員がそれぞれ約 10 件の応募を担当する採点ブロックを用意することで, 審査員の労力を軽減しています. しかし, すべての応募が同じ審査員によって評価されるわけではないため, スコアに偏りが生じる可能性があります. 一般的なテストとは異なり, 定性的な評価をもとに採点されているためです.

審査員のバックグラウンドによってプランが低く評価されることは, その審査員の属性によるものでやむを得ませんが, すべてのプランに対してスコアを低くつけがちな審査員と高く付けがちな審査員が存在すると, 学生の評価結果に偏りが生じてしまいます. そこで, こうしたスコアの偏りをできる限り排除するために, 統計を利用した得点調整を行い, 公平な評価結果を実現します.

1.3　ビジコンが公平性を追求すべき理由

公平さを求めているのには, 明確な理由があります. 一般に, ビジネスプランコンテスト (ビジコン) では, 評価が人の主観に大きく依存しています. そのため, 事業内容が精緻であることよりもプレゼンが上手い人が優位に立ちます. また, プロトタイプが完成しており, 顧客からも高評価を得ている事業であっても, 実際に市場に出てみたらうまくいかないというケースは珍しくありません. 一方で, ローンチ前の評価が低かったプロダクトがローンチ後に爆発的なヒットを記録することもあります. 結局のところ, ビジネスの成功・失敗というのは後になってからでなければ判断ができません. 成功したプランを振り返って「あれは構想段階から素晴らしかった」と言うのも, 失敗したものに対して「やっぱりダメだった」と言うのも, 結果を知っているからこそ可能な “後出しの評価” に過ぎません.

「起業の成功に再現性はない」とよく言われます. たしかに起業には運やタイミング, 偶然の出会いといったコントロール不能な要素が大きく影響します. だからこそ, 事業計画書の段階で評価が求められるビジコンという場において再現性を持った基準, 誰が採点しても同じ評価基準, そして透明性と客観性が担保された状態を目指すべきであると私たちは考えます. ビジコンは単なる競技ではなく, 挑戦者たちにとっては未来を左右する重要なステージです. 世の中には審査がブラックボックス化し, 公平公正とは言い難いビジコンも存在します. これから挑戦しようと踏ん張る学生の芽を潰さないためにも, 健全な評価環境を整備することはビジコン運営にとって最低限の責務です.

2　バイアス補正ありの評価モデル（階層ベイズモデル）

応募者にスコアをつけるとき, 審査員によって “厳しさ” が異なります. ある応募者が低得点だからといってそれが本当の実力によるものであるとは言い切れません. そこで, 「審査員ごとの厳しさの程度」を取り除いた “公平なスコア” を算出するため, 本モデルを適用します.

3　変数定義

本モデルでは, 次のような記号を使う.

- N：応募者の総数（最大 $N = 35$）
- M：審査員の総数（$M = 7$）
- J：観測されたスコアの総数（審査回数）

  $\rightarrow$ $J = N\times$ (各応募に割り当てられる審査員の人数)
- y_{ij}：審査員 j が応募者 i に与えたスコア（観測値）
- θ_i：応募者 i が本来得るべきスコア（目的変数）

  $\rightarrow$ それぞれの応募者が本来得るべきスコア $\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_N$ に対して, $\boldsymbol{\theta} = \left[\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_N\right]^\top$ とする.
- α_j：審査員 j の厳しさバイアス（評価の甘さ, 厳しさの傾向）

  $\rightarrow$ それぞれの審査員の厳しさバイアス $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_M$ に対して, $\boldsymbol{\theta} = \left[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_M\right]^\top$ とする.
- μ_θ：応募者が本来得るべきスコア θ_i がサンプリングされる分布の平均値
- τ_θ^2：応募者が本来得るべきスコア θ_i のばらつきの大きさ
- τ_α^2：審査員の厳しさバイアスのばらつきの大きさ
- σ^2：観測スコアの誤差の分散（同じ審査員であっても偶然誤差を出す可能性を考慮）
- a, b：σ^2 に関する事前パラメータ（Inv-Gamma 分布の形状パラメータ）
- μ_0：応募者が本来得るべきスコアの分布の平均に対する事前平均
- κ_0：応募者が本来得るべきスコアの分布の平均に対する精度パラメータ（κ_0^{-1} が分散）
- $a_{\theta 0}, b_{\theta 0}$：応募者が本来得るべきスコアの分散 τ_θ^2 に対する逆ガンマ分布の事前パラメータ
- $a_{\alpha 0}, b_{\alpha 0}$：審査員の厳しさバイアスの分散 τ_α^2 に対する逆ガンマ分布の事前パラメータ

今, 審査員 j が応募者 i を採点したことを (i, j) と書くことにする. また, I_i を応募者 i を固定させた上で全ての (i, j) を要素とする集合とする. 例えば, $i = 1$ を $j = 2, 3$ が採点した場合は, $I_1 = \{(1,2), (1,3)\}$ となる. また, J_j を審査員 j を固定させた上での全ての (i, j) を要素とする集合とする. 例えば, $j = 1$ が $i = 4, 5$ を採点した場合は, $J_1 = \{(4,1), (5,1)\}$ である. J が観測スコアの総数であるため,

$$J = \sum_{i=1}^{N} |I_i| = \sum_{j=1}^{M} |J_j| \tag{1}$$

が成立する. またこの表記を用いれば, 応募者 i と審査員 j の全ての採点ペア (i, j) を要素とする集合 O は, 和集合を用いて,

$$O = \bigcup_{i=1}^{N} I_i = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_N, \tag{2}$$

$$O = \bigcup_{j=1}^{M} J_j = J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_M \tag{3}$$

とかける. つまり,

$$O = \bigcup_{i=1}^{N} I_i = \bigcup_{j=1}^{M} J_j \tag{4}$$

である．このとき, 応募者 i に対する審査員 j のスコア y_{ij} を要素とする集合 Y は,

$$Y = \{y_{ij} \mid (i,j) \in O\} \tag{5}$$

とかける．以下, Y を応募者 i に対する審査員 j のスコア y_{ij} を要素とする集合として扱う．また, J_j に含まれる (i,j) の i の要素とする集合を $J_j^\dagger$, I_i に含まれる (i,j) の j を要素とする集合を $I_i^\dagger$ とかけば,

- $J_j^\dagger$: 審査員 j が採点したすべての応募者 i を要素とする集合
- $I_i^\dagger$: 応募者 i を採点したすべての審査員を要素とする集合

となる．例えば, $J_1 = \{(2,1),(3,1)\}$ の場合は $J_1^\dagger = \{2,3\}$ であり, 審査員 $j=1$ は応募者 $i=2,3$ を採点したことを意味する．$I_1 = \{(1,4),(1,5)\}$ の場合は $I_1^\dagger = \{4,5\}$ であり, 応募者 $i=1$ は審査員 $j=4,5$ から採点されたことを意味する．なお, 応募者 i に対する審査員 j のスコア y_{ij} が未観測である場合には, そのような未観測の y_{ij} を除外して総乗および総和を計算する演算として

$$\prod_{i=1}^{N}{}^{*} y_{ij}, \qquad \sum_{j=1}^{M}{}^{*} y_{ij} \tag{6}$$

のように, 演算子の右肩に * を付加する．

3.1　モデル概要

y_{ij} は応募者 i が審査員 j から受け取ったスコアであるため, y_{ij} の期待値を, 応募者が本来得るべきスコア θ_i から審査員の厳しさ α_j を引いた値として定義する．ただし, 必ずこの値が出るとは限らないため, その分散が σ^2 であると考える．また, 平均的なスコアを有する応募者が最も多く, 劣るないしは優秀な応募者は平均から離れるほど少なくなると考えられるため, 観測される y_{ij} が正規分布に従うと仮定し,

$$y_{ij} \sim \mathcal{N}(\theta_i - \alpha_j, \sigma^2) \tag{7}$$

とモデル化する．応募者 i が本来得るべきスコア θ_i の期待値を, 本来得るべきスコアの全体平均 μ_θ として定義する．ただし, この値が全ての応募者の得点として出るとは限らないため, その分散が τ_θ^2 であると考える．また, 本来得るべきスコアの全体平均を有する応募者が最も多く, 劣るないしは優秀な応募者は平均から離れるほど少なくなると考えられるため, 観測される θ_i が正規分布に従うと仮定し,

$$\theta_i \sim \mathcal{N}(\mu_\theta, \tau_\theta^2) \quad (i = 1, \cdots, N) \tag{8}$$

とする．審査員 j の厳しさ α_j の期待値を, 全審査員の厳しさを平均して 0 と定義する．ただし, この値が全ての審査員の厳しさとして出るとは限らないため, その分散が τ_α^2 であると考える．また, 平均的な厳しさを有する審査員が最も多く, 採点の仕方が甘いないしはかなり厳しい審査員は平均から離れるほど少なくなると考えられるため, 観測される α_j は正規分布に従うと仮定し,

$$\alpha_j \sim \mathcal{N}(0, \tau_\alpha^2) \quad (j = 1, \cdots, M) \tag{9}$$

とする．y_{ij} の分散として定義した σ^2 は, 未知な値であり不確定性を持つと考える．実際の採点の場面では, 応募者の本来の能力 θ_i や審査員の厳しさ α_j 以外にも, 評価結果に影響を与える要因がある．例えば, 審査員の疲れや心情による一時的な判断の揺れや, 応募者のパフォーマンスの変動, 評価環境や採点タイミングにおける影響などである．この分散 σ^2 は非負 (プラス) であり, 多くの場合小さな値を取るが, 大きな値が観測される可能性もあると考えられる．この性質を反映するため, 分散 σ^2 が逆ガンマ分布 (Inverse-Gamma 分布) に従うと仮定し,

$$\sigma^2 \sim \text{Inv-Gamma}(a, b) \tag{10}$$

とする．本来得るべきスコアの全体平均 μ_θ は, 未知な値であり不確定性をもつと考える．全応募者の本来の能力の期待値の初期値として μ_0 を定義する．ただし, 必ずこの値に定まるとは限らないため, その分散が κ_0^{-1} であると考える．本来得るべきスコアの全体平均 μ_θ は, 期待値 μ_0 と分散 κ_0^{-1} によって正規分布に従うと仮定し,

$$\mu_\theta \sim \mathcal{N}(\mu_0, \kappa_0^{-1}) \tag{11}$$

とする．応募者間における本来得るべきスコアの分散 τ_θ^2 は, 未知であり不確定性をもつと考える．平均的な能力を有する応募者が最も多く, 劣るないしは優秀な応募者が存在し, 分散 τ_θ^2 が大きくなることもある．分散 τ_θ^2 は非負であり, 多くの場合は小さな値を取るが, 大きな値が観測される可能性もあると考えられる．この性質を反映するため, 分散 τ_θ^2 が逆ガンマ分布に従うと仮定し,

$$\tau_\theta^2 \sim \text{Inv-Gamma}(a_{\theta 0}, b_{\theta 0}) \tag{12}$$

とする．同様に, 審査員間における厳しさの分散 τ_α^2 は, 未知であり不確定性をもつと考える．平均的な厳しさを有する審査員が最も多く, 甘いないしはかなり厳しい審査員が存在し, 分散 τ_α^2 が大きくなることもある．分散 τ_α^2 は非負であり, 多くの場合は小さな値を取るが, 大きな値が観測される可能性もあると考えられる．この性質を反映するため, 分散 τ_α^2 が逆ガンマ分布に従うと仮定し,

$$\tau_\alpha^2 \sim \text{Inv-Gamma}(a_{\alpha 0}, b_{\alpha 0}) \tag{13}$$

とする．これらから, モデル全体の階層構造は,

$$\text{観測層：}\ y_{ij} \mid (\theta_i, \alpha_j, \sigma^2) \sim \mathcal{N}(\theta_i - \alpha_j, \sigma^2) \tag{14}$$

$$\text{個体層：}\ \theta_i \mid (\mu_\theta, \tau_\theta^2) \sim \mathcal{N}(\mu_\theta, \tau_\theta^2), \quad \alpha_j \mid \tau_\alpha^2 \sim \mathcal{N}(0, \tau_\alpha^2), \quad \sigma^2 \sim \text{Inv-Gamma}(a, b) \tag{15}$$

$$\text{ハイパー層：}\ \mu_\theta \sim \mathcal{N}(\mu_0, \kappa_0^{-1}), \quad \tau_\theta^2 \sim \text{Inv-Gamma}(a_{\theta 0}, b_{\theta 0}), \quad \tau_\alpha^2 \sim \text{Inv-Gamma}(a_{\alpha 0}, b_{\alpha 0}) \tag{16}$$

である．この問題において $\boldsymbol{\theta}$ が目的変数であり, これを推定する．なお, ガウス分布と逆ガンマ分布の基本形はそれぞれ

$$x \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \tag{17}$$

$$p(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{18}$$

（ガウス分布：平均 μ, 分散 σ^2）

$$\sigma^2 \sim \text{Inv-Gamma}(a, b) \tag{19}$$

$$p(\sigma^2 \mid a, b) = \frac{b^{\,a}}{\Gamma(a)} (\sigma^2)^{-(a+1)} \exp\left(-\frac{b}{\sigma^2}\right), \quad \sigma^2 > 0. \tag{20}$$

（逆ガンマ分布：形状パラメータ a, b）

4　事後分布

観測データ y_{ij} が与えられたとき, パラメータ集合を

$$\boldsymbol{\Theta} = \{\boldsymbol{\theta},\, \boldsymbol{\alpha},\, \sigma^2,\, \mu_\theta,\, \tau_\theta^2,\, \tau_\alpha^2\} \tag{21}$$

とすると, ベイズの定理（事後分布 $\propto$ 尤度 $\times$ 事前分布）より事後分布は,

$$p\,(\boldsymbol{\Theta} \mid Y) \propto p\,(Y \mid \boldsymbol{\Theta}) \times p\,(\boldsymbol{\Theta}) \tag{22}$$

$$= p\,(Y \mid \boldsymbol{\Theta}) \times p(\boldsymbol{\theta}) \times p(\boldsymbol{\alpha}) \times p(\sigma^2) \times p(\mu_\theta) \times p(\tau_\theta^2) \times p(\tau_\alpha^2) \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{N}{}^{*} \prod_{j=1}^{M}{}^{*} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_{ij}-(\theta_i-\alpha_j))^2}{2\sigma^2}\right)\right)}_{\text{観測層（尤度）}} \\
&\times \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\theta^2}} \exp\left(-\frac{(\theta_i-\mu_\theta)^2}{2\tau_\theta^2}\right)\right)}_{\text{個体層：応募者の実力得点の事前分布}} \\
&\times \underbrace{\left(\prod_{j=1}^{M} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\alpha^2}} \exp\left(-\frac{\alpha_j^2}{2\tau_\alpha^2}\right)\right)}_{\text{個体層：審査員の厳しさの事前分布}} \\
&\times \underbrace{\frac{b^a}{\Gamma(a)}(\sigma^2)^{-(a+1)} \exp\left(-\frac{b}{\sigma^2}\right)}_{\text{個体層：観測誤差分散の事前分布}} \\
&\times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa_0^{-1}}} \exp\left(-\frac{(\mu_\theta-\mu_0)^2}{2\kappa_0^{-1}}\right)}_{\text{ハイパー層：平均の事前分布}} \\
&\times \underbrace{\frac{b_{\theta 0}^{a_{\theta 0}}}{\Gamma(a_{\theta 0})}(\tau_\theta^2)^{-(a_{\theta 0}+1)} \exp\left(-\frac{b_{\theta 0}}{\tau_\theta^2}\right)}_{\text{ハイパー層：応募者分散の事前分布}} \\
&\times \underbrace{\frac{b_{\alpha 0}^{a_{\alpha 0}}}{\Gamma(a_{\alpha 0})}(\tau_\alpha^2)^{-(a_{\alpha 0}+1)} \exp\left(-\frac{b_{\alpha 0}}{\tau_\alpha^2}\right)}_{\text{ハイパー層：審査員分散の事前分布}}.
\end{aligned} \tag{24}$$

5　パラメータ更新

5.1　観測層のパラメータ更新 θ_i, α_j

5.1.1　θ_i の更新

θ_i の事後分布は,

$$p(\theta_i \mid Y, \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2) \propto p(Y \mid \theta_i, \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2) \times p(\theta_i \mid \mu_\theta, \tau_\theta^2) \tag{25}$$

$$= \left[\prod_{j=1}^{M}{}^{*} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_{ij}-\theta_i+\alpha_j)^2}{2\sigma^2}\right)\right] \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\theta^2}} \exp\left(-\frac{(\theta_i-\mu_\theta)^2}{2\tau_\theta^2}\right) \tag{26}$$

$$\propto \left[\prod_{j=1}^{M}{}^{*} \exp\left(-\frac{(y_{ij}-\theta_i+\alpha_j)^2}{2\sigma^2}\right)\right] \times \exp\left(-\frac{(\theta_i-\mu_\theta)^2}{2\tau_\theta^2}\right) \tag{27}$$

$$= \exp\left(-\sum_{j=1}^{M}{}^{*} \frac{(y_{ij}-\theta_i+\alpha_j)^2}{2\sigma^2} - \frac{(\theta_i-\mu_\theta)^2}{2\tau_\theta^2}\right) \tag{28}$$

となり, この両辺に対数をとり, θ_i に関する項のみに注目すると,

$$\log p(\theta_i \mid Y, \alpha_j, \sigma^2) \propto -\sum_{j=1}^{M}{}^{*} \left(\frac{(y_{ij} - \theta_i + \alpha_j)^2}{2\sigma^2} \right) - \frac{(\theta_i - \mu_\theta)^2}{2\tau_\theta^2} \tag{29}$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{M}{}^{*} (\theta_i^2 - 2\theta_i(y_{ij} + \alpha_j) + (y_{ij} + \alpha_j)^2) - \frac{1}{2\tau_\theta^2}(\theta_i^2 - 2\theta_i\mu_\theta + \mu_\theta^2) \tag{30}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{|I_i^\dagger|}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau_\theta^2} \right)\theta_i^2 + \left(\frac{\sum^{*}{}_{j=1}^{M}(y_{ij} + \alpha_j)}{\sigma^2} + \frac{\mu_\theta}{\tau_\theta^2} \right)\theta_i + \{\text{const}\} \tag{31}$$

となる. ここで,

$$A = \left(\frac{|I_i^\dagger|}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau_\theta^2} \right) \tag{32}$$

$$B = \left(\frac{\sum^{*}{}_{j=1}^{M}(y_{ij} + \alpha_j)}{\sigma^2} + \frac{\mu_\theta}{\tau_\theta^2} \right) \tag{33}$$

とすると,

$$(31) = -\frac{1}{2}A\theta_i^2 + B\theta_i + \{\text{const}\} \tag{34}$$

$$= -\frac{1}{2}A\left(\theta_i^2 - 2\theta_i\frac{B}{A}\right) + \{\text{const}\} \tag{35}$$

$$= -\frac{1}{2}A\left(\theta_i - \frac{B}{A}\right)^2 + \{\text{const}\} \tag{36}$$

となる. 式 (36) のようにガウス分布の形に整理でき, $1/A$ が分散, B/A が期待値に対応する. よって,

$$\frac{1}{A} = \left(\frac{|I_i^\dagger|}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau_\theta^2} \right)^{-1} \tag{37}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{M}{}^{*}(y_{ij} + \alpha_j) + \frac{\mu_\theta}{\tau_\theta^2} \right) \tag{38}$$

であるから, 更新後パラメータ (アスタリスク * 付き) は,

$$\left(\tau_\theta^2\right)^* = \left(\frac{|I_i^\dagger|}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau_\theta^2} \right)^{-1} \tag{39}$$

$$(\mu_\theta)^* = \left(\tau_\theta^2\right)^* \left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{M}{}^{*}(y_{ij} + \alpha_j) + \frac{\mu_\theta}{\tau_\theta^2} \right) \tag{40}$$

となる. よって更新式は,

$$\theta_i \sim \mathcal{N}\left((\mu_\theta)^*, \left(\tau_\theta^2\right)^* \right). \tag{41}$$

なお, $|I_i^\dagger|$ は応募者 i を採点したすべての審査員の要素数である.

5.1.2 α_j の更新, 更新済みパラメータ：$\boldsymbol{\theta}$

α_j の事後分布は,

$$p(\alpha_j \mid Y, \boldsymbol{\theta}, \sigma^2) \propto p(Y \mid \boldsymbol{\theta}, \alpha_j, \sigma^2) \times p(\sigma^2 \mid a, b) \tag{42}$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{N}{}^{*} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_{ij} - \theta_i + \alpha_j)^2}{2\sigma^2} \right) \right] \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\alpha^2}} \exp\left(-\frac{\alpha_j^2}{2\tau_\alpha^2} \right) \tag{43}$$

$$\propto \left[\prod_{i=1}^{N}{}^{*} \exp\left(-\frac{(y_{ij} - \theta_i + \alpha_j)^2}{2\sigma^2} \right) \right] \times \exp\left(-\frac{\alpha_j^2}{2\tau_\alpha^2} \right) \tag{44}$$

となる．この両辺に対数をとり, α_j に関する項を抽出すると,

$$\log p(\alpha_j \mid Y, \boldsymbol{\theta}, \sigma^2) \propto \sum_{i=1}^{N}{}^{*} \left(-\frac{(y_{ij} - \theta_i + \alpha_j)^2}{2\sigma^2} \right) - \frac{\alpha_j^2}{2\tau_\alpha^2} \tag{45}$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{N}{}^{*} (\alpha_j^2 + 2\alpha_j(y_{ij} - \theta_i) + (y_{ij} - \theta_i)^2) - \frac{1}{2\tau_\alpha^2} \alpha_j^2 \tag{46}$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{|J_j^\dagger|}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau_\alpha^2} \right) \alpha_j^2 + \left(\frac{\sum^{*N}_{i=1} (y_{ij} - \theta_i)}{\sigma^2} \right) \alpha_j + \{\mathrm{const}\} \tag{47}$$

となる．ここで,

$$C = \left(\frac{|J_j^\dagger|}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau_\alpha^2} \right) \tag{48}$$

$$D = \left(\frac{\sum^{*N}_{i=1} (y_{ij} - \theta_i)}{\sigma^2} \right) \tag{49}$$

とすると,

$$(47) = -\frac{1}{2} C \alpha_j^2 + D\alpha_j + \{\mathrm{const}\} \tag{50}$$

$$= -\frac{1}{2} C \left(\alpha_j^2 - 2\alpha_j \frac{D}{C} \right) + \{\mathrm{const}\} \tag{51}$$

$$= -\frac{1}{2} C \left(\alpha_j - \frac{D}{C} \right)^2 + \{\mathrm{const}\} \tag{52}$$

となる．式 (52) のようにガウス分布の形に整理でき, $1/C$ が分散, D/C が期待値に対応する．よって,

$$\frac{1}{C} = \left(\frac{|J_j^\dagger|}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau_\alpha^2} \right) \tag{53}$$

$$\frac{D}{C} = \frac{1}{C} \left(\frac{\sum^{*N}_{i=1} (y_{ij} - \theta_i)}{\sigma^2} \right) \tag{54}$$

であるから, 更新後パラメータ (アスタリスク * 付き) は,

$$\left(\tau_\alpha^2\right)^* = \left(\frac{|J_j^\dagger|}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau_\alpha^2} \right)^{-1} \tag{55}$$

$$\left(\mu_\alpha\right)^* = \left(\tau_\alpha^2\right)^* \left(\frac{\sum^{*N}_{j=1} (y_{ij} - \theta_i)}{\sigma^2} \right) \tag{56}$$

となる．よって更新式は,

$$\alpha_j \sim \mathcal{N}\left((\mu_\alpha)^*, (\tau_\alpha^2)^*\right). \tag{57}$$

なお, $|J_j^\dagger|$ は審査員 j が採点したすべての応募者 i の要素数である．また, μ_α は変数定義に記載していないが, これは α_j を更新するための平均である．式 (55) を見てわかるように, 既出の変数によって算出される．ただし, 観測層として定義した, $y_{ij} \sim \mathcal{N}(\theta_i - \alpha_j, \sigma^2)$ は, 応募者の潜在的な能力 θ_i と審査員の厳しさパラメータ α_j に, 識別不可能性 (Non-identifiability) を抱えている[1]．このため本モデルでは α_j の更新後に全ての審査員の評価傾向 $\boldsymbol{\alpha}$ の和を 0 とする零中心化処理の制約

$$\sum_{j=1}^{M} \alpha_j = 0 \tag{58}$$

を導入し, 事前分布 $\alpha_j \sim \mathcal{N}(0, \tau_\alpha^2)$ との整合性を持たせた.

5.2　個体層のパラメータ更新 $\sigma^2, \mu_\theta, \tau_\theta^2, \tau_\alpha^2$

5.2.1　σ^2 の更新, 更新済みパラメータ：$\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}$

σ^2 の事後分布は,

$$p(\sigma^2 \mid Y, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) \propto p(Y \mid \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2) \times p(\sigma^2 \mid a, b) \tag{59}$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{N}{}^{*} \prod_{j=1}^{M}{}^{*} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_{ij} - \theta_i + \alpha_j)^2}{2\sigma^2}\right)\right] \times \frac{b^a}{\Gamma(a)} (\sigma^2)^{-(a+1)} \exp\left(-\frac{b}{\sigma^2}\right) \tag{60}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^{J} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{N}{}^{*} \sum_{j=1}^{M}{}^{*} (y_{ij} - \theta_i + \alpha_j))^2\right) \times \frac{b^a}{\Gamma(a)} (\sigma^2)^{-(a+1)} \exp\left(-\frac{b}{\sigma^2}\right) \tag{61}$$

$$\propto \left(\sigma^2\right)^{-\frac{J}{2}} \left(\sigma^2\right)^{-(a+1)} \exp\left[-\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}{}^{*} \sum_{j=1}^{M}{}^{*} (y_{ij} - \theta_i + \alpha_j)^2 + b\right)\right] \tag{62}$$

$$= \left(\sigma^2\right)^{-\left(a + \frac{J}{2} + 1\right)} \exp\left[-\frac{1}{\sigma^2}\left(b + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}{}^{*} \sum_{j=1}^{M}{}^{*} (y_{ij} - \theta_i + \alpha_j)^2\right)\right] \tag{63}$$

と計算できる．これより更新後パラメータ (アスタリスク * 付き) は,

$$(a)^* = a + \frac{J}{2} \tag{64}$$

$$(b)^* = b + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N}{}^{*} \sum_{j=1}^{M}{}^{*} (y_{ij} - \theta_i + \alpha_j)^2 \tag{65}$$

であるから, 更新式は,

$$\left(\sigma^2\right)^* \sim \text{Inv-Gamma}\left((a)^*, (b)^*\right). \tag{66}$$

5.2.2　μ_θ の更新, 更新済みパラメータ：$\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2$

μ_θ の事後分布は,

$$p(\mu_\theta \mid \boldsymbol{\theta}, \tau_\theta^2) \propto p(\boldsymbol{\theta} \mid \mu_\theta, \tau_\theta^2) \times p(\mu_\theta \mid \mu_0, \kappa_0^{-1}) \tag{67}$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\theta^2}} \exp\left(-\frac{(\theta_i - \mu_\theta)^2}{2\tau_\theta^2}\right)\right] \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa_0^{-1}}} \exp\left(-\frac{(\mu_\theta - \mu_0)^2}{2\kappa_0^{-1}}\right) \tag{68}$$

[1] モデルの尤度はパラメータの差分項 $\theta_i - \alpha_j$ によって決まる．ここで, 任意の定数 c を用いて $\theta_i + c$ と $\alpha_j + c$ という新しいパラメータの組みを考えてもその差は $(\theta_i + c) - (\alpha_j + c) = \theta_i - \alpha_j$ となり, 尤度が変わらない．このように, パラメータ空間において尤度を最大化する θ_i, α_j が一意に定まらず, 直線として無限に存在してしまう.

である．これに対数を取り μ_θ に関する項だけを整理すると，

$$\log p(\mu_\theta \mid \boldsymbol{\theta}, \tau_\theta^2) \propto -\frac{1}{2\tau_\theta^2}\sum_{i=1}^{N}(\theta_i - \mu_\theta)^2 - \frac{1}{2}\kappa_0(\mu_\theta - \mu_0)^2 \tag{69}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{N}{\tau_\theta^2} + \kappa_0\right)\mu_\theta^2 + \left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\theta_i}{\tau_\theta^2} + \kappa_0\mu_0\right)\mu_\theta + \{\text{const}\} \tag{70}$$

ここで，

$$E = \left(\frac{N}{\tau_\theta^2} + \kappa_0\right) \tag{71}$$

$$F = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\theta_i}{\tau_\theta^2} + \kappa_0\mu_0\right) \tag{72}$$

とすると，

$$(70) = -\frac{1}{2}E\mu_\theta^2 + F\mu_\theta + \{\text{const}\} \tag{73}$$

$$= -\frac{1}{2}E\left(\mu_\theta^2 - 2\mu_\theta\frac{F}{E}\right) + \{\text{const}\} \tag{74}$$

$$= -\frac{1}{2}E\left(\mu_\theta - \frac{F}{E}\right)^2 + \{\text{const}\} \tag{75}$$

となる．式 (75) のように，ガウス分布の形に整理でき，$1/E$ が分散，F/E が期待値に対応する．よって，

$$\frac{1}{E} = \left(\frac{N}{\tau_\theta^2} + \kappa_0\right)^{-1} \tag{76}$$

$$\frac{F}{E} = \frac{1}{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\theta_i}{\tau_\theta^2} + \kappa_0\mu_0\right) \tag{77}$$

である．μ_0, κ_0^{-1} は初期値であるため，更新後パラメータ (アスタリスク * 付き) を μ, κ^{-1} を用いて，

$$(\mu)^* = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N}\theta_i}{\tau_\theta^2} + \kappa_0\mu_0}{\frac{N}{\tau_\theta^2} + \kappa_0} \tag{78}$$

$$\left(\kappa^{-1}\right)^* = (\mu)^*\left(\frac{1}{\frac{N}{\tau_\theta^2} + \kappa_0}\right) \tag{79}$$

とできる．更新式は，

$$\mu_\theta \sim \mathcal{N}\left((\mu)^*, \left(\kappa^{-1}\right)^*\right). \tag{80}$$

5.2.3 τ_θ^2 の更新, 更新済みパラメータ：$\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2, \mu_\theta$

τ_θ^2 の事後分布は,

$$p(\tau_\theta^2 \mid \boldsymbol{\theta}, \mu_\theta) \propto p(\boldsymbol{\theta} \mid \mu_\theta, \tau_\theta^2) \times p(\tau_\theta^2 \mid a_{\theta 0}, b_{\theta 0}) \tag{81}$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\theta^2}} \exp\left(-\frac{(\theta_i - \mu_\theta)^2}{2\tau_\theta^2}\right)\right] \times \frac{b_{\theta 0}^{a_{\theta 0}}}{\Gamma(a_{\theta 0})} (\tau_\theta^2)^{-(a_{\theta 0}+1)} \exp\left(-\frac{b_{\theta 0}}{\tau_\theta^2}\right) \tag{82}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\theta^2}}\right)^N \exp\left(-\frac{1}{2\tau_\theta^2}\sum_{i=1}^{N}(\theta_i - \mu_\theta)^2\right) \times \frac{b_{\theta 0}^{a_{\theta 0}}}{\Gamma(a_{\theta 0})} (\tau_\theta^2)^{-(a_{\theta 0}+1)} \exp\left(-\frac{b_{\theta 0}}{\tau_\theta^2}\right) \tag{83}$$

$$\propto (\tau_\theta^2)^{-N/2} (\tau_\theta^2)^{-(a_{\theta 0}+1)} \exp\left[-\frac{1}{\tau_\theta^2}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(\theta_i - \mu_\theta)^2 + b_{\theta 0}\right)\right] \tag{84}$$

$$= (\tau_\theta^2)^{-\left(a_{\theta 0} + \frac{N}{2} + 1\right)} \exp\left[-\frac{1}{\tau_\theta^2}\left(b_{\theta 0} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(\theta_i - \mu_\theta)^2\right)\right] \tag{85}$$

と計算できる. $a_{\theta 0}, b_{\theta 0}$ は初期値であるため, 更新後パラメータ (アスタリスク * 付き) として a_θ, b_θ を用いて,

$$(a_\theta)^* = a_\theta + \frac{N}{2} \tag{86}$$

$$(b_\theta)^* = b_\theta + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(\theta_i - \mu_\theta)^2 \tag{87}$$

となる. 更新式は,

$$\tau_\theta^2 \sim \text{Inv-Gamma}\big((a_\theta)^*,\ (b_\theta)^*\big)\,. \tag{88}$$

5.2.4 τ_α^2 の更新, 更新済みパラメータ：$\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2, \mu_\theta, \tau_\theta^2$

τ_α^2 の事後分布は,

$$p(\tau_\alpha^2 \mid \boldsymbol{\alpha}) \propto p(\boldsymbol{\alpha} \mid \tau_\alpha^2) \times p(\tau_\alpha^2 \mid a_{\alpha 0}, b_{\alpha 0}) \tag{89}$$

$$\propto \left[\prod_{j=1}^{M} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\alpha^2}} \exp\left(-\frac{\alpha_j^2}{2\tau_\alpha^2}\right)\right] \times \frac{b_{\alpha 0}^{a_{\alpha 0}}}{\Gamma(a_{\alpha 0})} (\tau_\alpha^2)^{-(a_{\alpha 0}+1)} \exp\left(-\frac{b_{\alpha 0}}{\tau_\alpha^2}\right) \tag{90}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_\alpha^2}}\right)^M \exp\left(-\frac{1}{2\tau_\alpha^2}\sum_{j=1}^{M}\alpha_j^2\right) \times \frac{b_{\alpha 0}^{a_{\alpha 0}}}{\Gamma(a_{\alpha 0})} (\tau_\alpha^2)^{-(a_{\alpha 0}+1)} \exp\left(-\frac{b_{\alpha 0}}{\tau_\alpha^2}\right) \tag{91}$$

$$\propto (\tau_\alpha^2)^{-M/2} (\tau_\alpha^2)^{-(a_{\alpha 0}+1)} \exp\left[-\frac{1}{\tau_\alpha^2}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}\alpha_j^2 + b_{\alpha 0}\right)\right] \tag{92}$$

$$= (\tau_\alpha^2)^{-\left(a_{\alpha 0} + \frac{M}{2} + 1\right)} \exp\left[-\frac{1}{\tau_\alpha^2}\left(b_{\alpha 0} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}\alpha_j^2\right)\right] \tag{93}$$

である. これより,

$$(a_\alpha)^* = a_{\alpha 0} + \frac{M}{2} \tag{94}$$

$$(b_\alpha)^* = b_{\alpha 0} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}\alpha_j^2 \tag{95}$$

とできるから, 更新式は,

$$\tau_\theta^2 \sim \text{Inv-Gamma}\big((a_\alpha)^*,\ (b_\alpha)^*\big)\,. \tag{96}$$

6　Gibbs Sampling

Gibbs Sampling は, 多次元の確率分布から直接サンプリングを行うことが困難な場合に用いられる Markov Chain Monte Carlo (MCMC) 法である．本稿のようにモデルの複雑化に伴い事後分布を解析的に求めるのが難しい場合の近似手法として Gibbs Sampling を利用している．全体の事後分布をパラメータごとの条件付き事後分布に分解して, 各パラメータを反復的にサンプリングすることで, 全体の事後分布に従うサンプルを生成している．サンプリングの反復回数を t とすると,

$$\theta_i^{(t+1)} \sim p\left(\theta_i \mid \boldsymbol{\alpha}^{(t)},\, \sigma^{2(t)},\, \mu_\theta^{(t)},\, \tau_\theta^{2(t)},\, \tau_\alpha^{2(t)}, Y\right), \tag{97}$$

$$\alpha_j^{(t+1)} \sim p\left(\alpha_j \mid \boldsymbol{\theta}^{(t+1)},\, \sigma^{2(t)},\, \mu_\theta^{(t)},\, \tau_\theta^{2(t)},\, \tau_\alpha^{2(t)}, Y\right), \tag{98}$$

$$\sigma^{2(t+1)} \sim p\left(\sigma^2 \mid \boldsymbol{\theta}^{(t+1)}, \boldsymbol{\alpha}^{(t+1)},\, \mu_\theta^{(t)},\, \tau_\theta^{2(t)},\, \tau_\alpha^{2(t)}, Y\right), \tag{99}$$

$$\mu_\theta^{(t+1)} \sim p\left(\mu_\theta \mid \boldsymbol{\theta}^{(t+1)}, \boldsymbol{\alpha}^{(t+1)},\, \sigma^{2(t+1)}\, \tau_\theta^{2(t)},\, \tau_\alpha^{2(t)}, Y\right), \tag{100}$$

$$\tau_\theta^{2(t+1)} \sim p\left(\tau_\theta^2 \mid \boldsymbol{\theta}^{(t+1)}, \boldsymbol{\alpha}^{(t+1)},\, \sigma^{2(t+1)}\, \mu_\theta^{(t+1)},\, \tau_\alpha^{2(t)}, Y\right), \tag{101}$$

$$\tau_\alpha^{2(t+1)} \sim p\left(\tau_\alpha^2 \mid \boldsymbol{\theta}^{(t+1)}, \boldsymbol{\alpha}^{(t+1)},\, \sigma^{2(t+1)}\, \mu_\theta^{(t+1)},\, \tau_\theta^{2(t+1)}\, Y\right) \tag{102}$$

といった順番でパラメータをサンプリングし, 順次更新される．こうして得られたサンプル集合から, 初期の期間 (burn-in) のサンプルを除去する．これは事後分布が収束する前のサンプルがサンプリングの初期の期間に含まれているという考えのもと行っているものである．除去後に残ったサンプルは事後分布に従う独立同分布に近似されたサンプルとみなし, これを用いてパラメータの推定を行う．

7　事後分布に基づく推定値の決定

初期の期間 (burn-in) のサンプルが除去された状態の $\{\theta_i^{(1)}, \theta_i^{(2)}, \cdots, \theta_i^{(S)}\}$ から最終的に代表値として 1 つの値を求める必要がある．事後分布をプロットし, これが正規分布であると判断できた場合, 事後平均を推定値（点推定）として採用する．θ_i の推定値となる事後平均は,

$$\hat{\theta}_i = \mathbb{E}[\theta_i \mid \{y_{ij}\}] \tag{103}$$

である．実装上, MCMC(本モデルでは Gibbs Sampling) により事後分布からサンプルを取得し,

$$\hat{\theta}_i \approx \frac{1}{S} \sum_{s=1}^{S} \theta_i^{(s)} \tag{104}$$

とした．この $\hat{\theta}_i$ を応募者 i の得点とした．

以上.